

**Eine Bedingung für das Aussterben  
eines Verzweigungsprozesses mit  
absorbierender unterer Schranke**

von

**Hans-Jürgen Schuh**

aus

**Fürth in Bayern**







# **Eine Bedingung für das Aussterben eines Verzweigungsprozesses mit absorbierender unterer Schranke**

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen  
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur  
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt  
von  
**Hans-Jürgen Schuh**  
aus  
**Fürth in Bayern**

Als Dissertation genehmigt von den  
Naturwissenschaftlichen Fachbereichen  
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 14.5.1975

Vorsitzender der kommissarischen  
Promotionskommission

Prof. Dr. H. Behrens

Erstberichterstatter:

Prof. Dr. K. Jacobs

Zweitberichterstatter:

Prof. Dr. H. Bauer

## Inhaltsverzeichnis:

|                                                                                                            | Seite |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Einleitung                                                                                                 | 1     |
| Definition des "Verzweigungsprozesses<br>mit absorbierender unterer Schranke"<br>und einige Vorbemerkungen | 4     |
| Kapitel 1                                                                                                  |       |
| Der Fall: $1 < m, \sigma^2 < \infty$                                                                       | 11    |
| Kapitel 2                                                                                                  |       |
| Der Fall: $1 < m < \infty, \sigma^2 = \infty$                                                              | 21    |
| Kapitel 3                                                                                                  |       |
| Der Fall: $m = \infty$                                                                                     | 47    |
| Literaturverzeichnis                                                                                       | 60    |

## E I N L E I T U N G

Der Galton-Watson-Prozeß ist das klassische Beispiel eines Verzweigungsprozesses. Er kann als wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell für das zahlenmäßige Wachstum einer Population interpretiert werden (siehe Vorbemerkungen), hat aber darüber hinaus noch weitere Anwendungen in der Biologie und Physik (z.B. als Modell für Kettenreaktionen).

Eine ausführliche Darstellung findet man bei T. E. Harris [4] und K. B. Athreya - P. E. Ney [1] .

A. M. Zubkov (1970) betrachtet in seiner Arbeit [10] eine Modifikation des Galton-Watson-Prozesses, den "beschränkten Verzweigungsprozeß". Für jede Generation wird eine obere Grenze  $\hat{g}(n)$  der Populationsgröße vorgegeben. Jede Generation entsteht aus der vorhergehenden nach den Regeln des Galton-Watson-Prozesses. Etwaige überzählige Individuen gehen zugrunde und haben keine Nachkommen.

A. M. Zubkov zeigt, daß ein beschränkter Verzweigungsprozeß genau dann mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner als 1 ausstirbt, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} q^{\hat{g}(n)}$  konvergiert, wobei  $q$  die Aussterbewahrscheinlichkeit des zugehörigen Galton-Watson-Prozesses ist.

In der vorliegenden Arbeit wird eine andere Variante des Galton-Watson-Prozesses untersucht, die wir "Verzweigungsprozeß mit absorbierender unterer Schranke" nennen wollen.

Für jede Generation wird eine untere Schranke  $g(n)$  der Populationsgröße vorgegeben. Wieder entstehen die Generationen aus den vorhergehenden nach den Regeln des Galton-Watson-Prozesses. Wird aber die untere Schranke nicht übertreten, so gehen alle Individuen zugrunde, und die Populationsgröße aller nachfolgenden Generationen ist deshalb gleich Null ("absorbierende Schranke").

Dieser Prozeß ist ein Modell der Situation, daß nur hinreichend große Populationen in einer feindlichen Umwelt überleben können.

Während A. M. Zubkov, wie oben erwähnt, ein Kriterium für das Aussterben eines beschränkten Verzweigungsprozesses (obere Schranke) bewiesen hat, wird in dieser Arbeit eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür hergeleitet, daß ein Verzweigungsprozeß mit absorbierender unterer Schranke mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner als 1 ausstirbt (siehe Satz 1.1, Satz 2.2, Satz 3.1).

Unter der Voraussetzung, daß die Anzahl der Kinder eines Individuums einen Erwartungswert  $m > 1$  (superkritischer Fall) und endliche Varianz hat, wird in Kapitel 1 mit elementaren

Hilfsmitteln (z.B. Tschebyscheff'sche Ungleichung) gezeigt, daß dieser Prozeß genau dann nicht fast sicher ausstirbt, wenn im großen und ganzen  $g(n)$  nicht schneller als die erwartete Populationsgröße ( $= m^n$ ) wächst.

Mit Hilfe der Ergebnisse der Arbeiten von E. Seneta [8;9] und C.C. Heyde [5] (siehe Satz 2.1) kann diese Bedingung in entsprechend abgeänderter Form in Kapitel 2 ( $1 < m < \infty$ ) und Kapitel 3 ( $m = \infty$ ) auch im Falle unendlicher Varianz bewiesen werden.

Persönlich danken möchte ich Herrn Professor Dr. K. Jacobs, der meine Arbeit stets mit fördernder Anteilnahme verfolgte.

Definition des "Verzweigungsprozesses mit absorbierender unterer Schranke" und einige Vorbemerkungen

$\mathbb{N}$  sei die Menge der natürlichen Zahlen,  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Definition 0.1:

Ein Galton-Watson-Prozeß  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist eine Markovkette mit Zustandsraum  $\mathbb{N}_0$ , die folgende Bedingung erfüllt:

$$Z_0 \equiv 1$$

$$Z_{n+1} = \begin{cases} Y_1^{(n)} + \dots + Y_{Z_n}^{(n)}, & \text{falls } Z_n > 0 \\ 0 & \text{falls } Z_n = 0 \end{cases} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei die  $Y_j^{(n)}$  voneinander unabhängige Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{N}_0$  sind, und alle  $Y_j^{(n)}$ , unabhängig von  $n$  und  $j$ , nach dem gleichen Wahrscheinlichkeitsvektor  $p = (p_0, p_1, \dots)$  verteilt sind.

Interpretation:

$Z_n$  beschreibt die Anzahl der Individuen der  $n$ -ten Generation. Die  $(n+1)$ -te Generation besteht genau aus den Kindern der Individuen der  $n$ -ten Generation. Falls  $Z_n > 0$ , beschreibt  $Y_j^{(n)}$  die Anzahl der Kinder des  $j$ -ten Individuums der  $n$ -ten Generation. Die obige Bedingung besagt also, daß sich jedes Individuum unabhängig vom Verhalten der anderen Individuen seiner Generation und unabhängig von der Vergangenheit (Markovkette),

gemäß der Verteilung  $p$  fortpflanzt. Wir nennen  $p$  deswegen die "Nachwuchsverteilung von  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ".

Definition 0.2:

Es sei eine Funktion  $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0$  gegeben. Dann konstruieren wir zu jedem Galton-Watson-Prozeß  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine neue Markovkette  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , wie folgt:

$$U_0 \equiv 1$$

$$U_{n+1} = \begin{cases} Y_1^{(n)} + \dots + Y_{U_n}^{(n)}, & \text{falls } U_n > 0 \text{ und } Y_1^{(n)} + \dots + Y_{U_n}^{(n)} > g(n+1) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wollen wir "Verzweigungsprozeß mit absorbierender unterer Schranke  $g$ " nennen.

Interpretation:

$U_n$  beschreibt wieder die Anzahl der Individuen der  $n$ -ten Generation.  $g(n) + 1$  ist die minimale Anzahl an Individuen, die eine Population in der  $n$ -ten Generation benötigt, um lebensfähig zu sein. Ist die Gesamtanzahl der Kinder von Individuen der  $(n-1)$ -ten Generation ( $= Y_1^{(n-1)} + \dots + Y_{U_{n-1}}^{(n-1)}$ , falls  $U_{n-1} > 0$ ) kleiner oder gleich  $g(n)$ , so sterben diese Kinder alle, z.B. durch eine feindliche Umwelt bedingt, bevor sie sich selbst wieder fortpflanzen können; d.h.  $U_n = 0$ .

### Bezeichnungen:

Das den beiden Prozessen  $(Z_n)$  und  $(U_n)$  zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsfeld bezeichnen wir mit  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . Die Verteilung des Galton-Watson-Prozesses  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist nach Konstruktion durch den Wahrscheinlichkeitsvektor  $p$  eindeutig festgelegt. Wir sagen auch:  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  wird von  $p$  gesteuert.

### Bemerkung 0.1:

Aus der Konstruktion liest man ab, daß

$$U_n(\omega) > 0 \implies U_n(\omega) = Z_n(\omega) ; \quad \omega \in \Omega.$$

Daraus folgt:

$$(1) \quad U_n(\omega) \leq Z_n(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Allgemein gilt:

$$(2) \quad g_1(n) \geq g_2(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\implies U_n^{(1)}(\omega) \leq U_n^{(2)}(\omega) \quad n \in \mathbb{N}_0, \omega \in \Omega;$$

falls  $g_1, g_2$  zwei untere Schranken und  $(U_n^{(1)})$ ,  $(U_n^{(2)})$  die zugehörigen Prozesse (mit gleicher Nachwuchsverteilung  $p$ ).

### Definition 0.3:

$$m := E(Z_1) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p_j \quad (= \text{Erwartungswert der Anzahl der Kinder eines Individuums})$$

$$\sigma^2 := V(Z_1) := E(Z_1 - E(Z_1))^2 \quad (= \text{Varianz der Anzahl der Kinder eines Individuums})$$

$q := P(Z_n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}) = P(Z_n = 0 \text{ für schließlich alle } n \in \mathbb{N})$

ist die Aussterbewahrscheinlichkeit des Galton-Watson-Prozesses  $(Z_n)$

$Q(g) := P(U_n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}) =$

$= P(U_n = 0 \text{ für schließlich alle } n \in \mathbb{N})$

ist die Aussterbewahrscheinlichkeit des Verzweigungsprozesses  $(U_n)$  mit absorbierender unterer Schranke  $g$ .

#### Bemerkung 0.2:

Bekanntlich (siehe z.B. [4], Seite 7) gilt für die Aussterbewahrscheinlichkeit  $q$  des Galton-Watson-Prozesses

$(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0} :$

$q = 1$ , falls  $m \leq 1$  (subkritischer und kritischer Fall)

$q < 1$ , falls  $m > 1$  (superkritischer Fall).

Nach (1) ist stets  $Q(g) \geq q$ .

$\Rightarrow Q(g) = 1$ , falls  $m \leq 1$ .

Im subkritischen und im kritischen Fall stirbt also der Prozeß  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  für jede Schranke  $g$  fast sicher aus.

Bevor wir in den nächsten Kapiteln Bedingungen für  $Q(g) < 1$  im superkritischen Fall angeben, behandeln wir im Satz 0.1 noch eine Überlegung allgemeiner Art.

Satz 0.1:

- a) Zu jedem Galton-Watson-Prozeß  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  (gesteuert durch  $p$ ) existiert eine untere Schranke  $g$  mit  $Q(g) = 1$ .
- b) Zu jeder Funktion  $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0$  existiert ein Wahrscheinlichkeitsvektor  $p$ , so daß der von  $p$  gesteuerte Verzweigungsprozeß  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit der unteren Schranke  $g$  mit Wahrscheinlichkeit  $Q(g) < 1$  ausstirbt.

Beweis:

- a) Da  $\sum_{j=0}^{\infty} P(Z_n = j) = 1$ , gibt es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $g(n)$

$$\text{mit } P(Z_n > g(n)) = \sum_{j=g(n)+1}^{\infty} P(Z_n = j) \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 1 - Q(g) \leq P(U_n > 0) \leq P(Z_n > g(n)) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

q.e.d.

- b) Wegen (2) können wir o. B. d. A. annehmen, daß  $g$  so groß ist,

daß

$$(3) \quad \left( \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{2^j} \right)^{g(n)+1} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Es sei

$$(4) \quad l(1) := g(1)+1; \quad l(n+1) := \max \{ l(n)+1, g(n+1)-g(n) \}$$

$$\Rightarrow g(1) + 1 \leq l(n) < l(n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$g(n+1) - g(n) \leq l(n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Wir definieren jetzt den Wahrscheinlichkeitsvektor  $p$  :

$$(5) \quad \begin{cases} p_{1(n)} := \frac{1}{2^n} & \text{für } n \in \mathbb{N} \\ p_j := 0 & \text{für } j \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} p_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 ;$$

$$\sum_{j=0}^{g(n+1)-g(n)} p_j \stackrel{(4)}{\leq} \sum_{j=0}^{1(n+1)} p_j = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{2^j}$$

Es folgt :

$$\underline{P(Z_1 > g(1))} = \sum_{j=g(1)+1}^{\infty} p_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \underline{1}$$

$$\underline{P(Z_{n+1} > g(n+1), Z_n > g(n), \dots, Z_1 > g(1))} =$$

$$= \sum_{u=g(n)+1}^{\infty} P(Z_{n+1} > g(n+1) | Z_n = u) P(Z_n = u, Z_{n-1} > g(n-1), \dots, Z_1 > g(1))$$

$$\stackrel{(5)}{\cong} \sum_{u=g(n)+1}^{\infty} P(\exists 1 \leq k \leq u : Y_k^{(n)} \geq g(n+1) + 1 - g(n)) \cdot P(\dots)$$

$$= \sum_{u=g(n)+1}^{\infty} \left(1 - \left(\sum_{j=0}^{g(n+1)-g(n)} p_j\right)^u\right) \cdot P(\dots)$$

$$\stackrel{(5)}{\cong} \left(1 - \left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{2^j}\right)^{g(n)+1}\right) \sum_{u=g(n)+1}^{\infty} P(Z_n = u, Z_{n-1} > g(n-1), \dots, Z_1 > g(1))$$

$$\geq \frac{(1 - \frac{1}{2^n}) P(Z_n > g(n), \dots, Z_1 > g(1))}{(3)}$$

$$\Rightarrow 1 - Q(g) = P(U_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}) =$$

$$= P(Z_n > g(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}) \geq \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) \neq 0$$

q.e.d.

# Kapitel 1

Der Fall :  $1 < m$  ,  $\sigma^2 < \infty$

In diesem Kapitel wird mit elementaren Hilfsmitteln folgendes notwendige und hinreichende Kriterium für die Aussterbewahrscheinlichkeit  $Q(g)$  des Verzweigungsprozesses  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit absorbierender unterer Schranke  $g$  bewiesen:

Es sei  $b := \max \{ j \mid p_j \neq 0 \} \quad (\in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$

## Satz 1.1:

Falls  $m > 1$  und  $\sigma^2 < \infty$  , gilt

$Q(g) < 1 \iff g(n) < b^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{und } \limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) \cdot m^{-n} < \infty$$

Diese Bedingung werden wir in den Kapiteln 2 und 3 in leicht modifizierter Form auch für den Fall  $\sigma^2 = \infty$  beweisen.

Satz 1.1 besagt, daß der Prozeß  $(U_n)$  genau dann mit positiver Wahrscheinlichkeit überlebt, wenn die zum Überleben notwendige Mindestanzahl  $g(n) + 1$  nie die maximal mögliche Populationsgröße  $(= b^n)$  überschreitet, und wenn  $g(n)$  nicht schneller wächst, als die erwartete Anzahl der Individuen des zugehörigen Galton-Watson-Prozesses.

$(E(Z_n) = m^n$  , siehe z.B. [4] , Seite 6).

Als nächstes werden wir einige Vorbereitungen zum Beweis des Satzes treffen.

### Konstruktion 1:

Es sei  $1 < u < m$  beliebig, aber fest, gewählt.

$$\bar{x} := (m - u)^{-4}$$

Für jedes  $x_0 \geq \bar{x}$  konstruieren wir dann die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gemäß

$$(1) \quad x_{n+1} := x_n (m - x_n^{-\frac{1}{4}})$$

### Lemma 1.1:

$\exists A > 0$  unabhängig von  $x_0$ , so daß

$$\frac{x_n}{x_0} \geq m^n \cdot A \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

### Beweis:

$$\text{Da } x_0 \geq \bar{x} \implies m - x_0^{-\frac{1}{4}} \geq u \implies x_1 \geq u x_0 (\geq x_0).$$

Da für  $t > 0$  die Funktion  $f(t) = t^{-\frac{1}{4}}$  monoton fällt, folgt mit vollständiger Induktion

$$(2) \quad x_{n+1} \geq u \cdot x_n \text{ und damit } x_n \geq u^n x_0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{x_n}{x_0} = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{x_1}{x_0} = m^n (1 - \frac{1}{m} x_{n-1}^{-\frac{1}{4}}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{m} x_0^{-\frac{1}{4}})$$

$$\geq m^n \prod_{j=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{m} x_j^{-\frac{1}{4}}) =: m^n A(x_0) > 0, \text{ denn}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j^{-\frac{1}{4}} \leq x_0^{-\frac{1}{4}} \sum_{j=0}^{\infty} u^{-\frac{j}{4}} < \infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{m} \bar{x}^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{u}{m} < 1.$$

Da  $A(\cdot)$  monoton wachsend in  $x_0$ , erfüllt  $A := A(\bar{x})$  die Behauptung von Lemma 1.1

### Konstruktion 2:

Zu  $y_0 \geq 1$  konstruieren wir die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gemäß:

$$(3) \quad y_{n+1} = y_n \left( m + y_n^{-\frac{1}{4}} \right)$$

### Lemma 1.2:

$\exists \infty > B > 1$ , unabhängig von  $y_0$ , so daß

$$(4) \quad \frac{y_n}{y_0} \leq m^n \cdot B \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Beweis: Es gilt zunächst

$y_{n+1} \geq m \cdot y_n$  und damit  $y_n \geq m^n \cdot y_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\frac{y_n}{y_0} = \frac{y_n}{y_{n-1}} \cdot \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{y_1}{y_0} = m^n \left( 1 + \frac{1}{m} y_{n-1}^{-\frac{1}{4}} \right) \cdot \dots \cdot \left( 1 + \frac{1}{m} y_0^{-\frac{1}{4}} \right)$$

$$\leq m^n \prod_{j=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{m} y_j^{-\frac{1}{4}} \right) =: m^n B(y_0) < \infty, \text{ denn}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} y_j^{-\frac{1}{4}} \leq y_0^{-\frac{1}{4}} \sum_{j=0}^{\infty} m^{-\frac{j}{4}} < \infty$$

Da  $B(\cdot)$  monoton fallend in  $y_0$ , erfüllt  $B := B(1)$  die Behauptung von Lemma 1.2

Lemma 1.3:

$Y_1, Y_2, \dots$  seien unabhängige Zufallsvariable mit Werten in  $N_0$ , alle nach  $p$  verteilt.

$$S_1 := \sum_{j=1}^1 Y_j. \text{ Dann gilt}$$

$$(5) P(|S_1 - 1 \cdot m| > 1^{\frac{3}{4}}) \leq c^2 1^{-\frac{1}{2}} \text{ für alle } 1 \in \mathbb{N}$$

Beweis:

Lemma 1.3 folgt unmittelbar aus der Tschebyscheff'schen Ungleichung und der Tatsache, daß

$$E(S_1) = \sum_{j=1}^1 E(Y_j) = 1 \cdot m \quad \text{und}$$

$$V(S_1) = \sum_{j=1}^1 V(Y_j) = 1 \cdot c^2 \quad \text{wegen der Unabhängigkeit der } Y_j.$$

Beweis von Satz 1.1:

Es sei o. B. d. A.

$$(6) \quad p_j < 1 \quad \text{für alle } j \in N_0.$$

Andernfalls entartet der Prozeß in den deterministischen Vorgang: "Jedes Individuum hat genau  $b$  Kinder". Die Behauptung des Satzes ist dann offensichtlich erfüllt.

" $\Leftarrow$ " : Es sei  $\infty > L > \limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) \cdot m^{-n}$  so gewählt,  
daß

$$(7) \quad g(n) < L \cdot m^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$(8) \quad \exists \bar{l} \geq \bar{x} \quad \forall l \geq \bar{l} : \epsilon^2 \cdot l^{-\frac{1}{2}} < 1$$

$$(9) \quad \exists h > m \quad \text{mit } p_h > 0 \quad \text{und } h^n > g(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ denn}$$

$$1. \text{ Fall: } b < \infty \quad \Rightarrow \quad b > m \quad \text{wegen (6); } h = b \text{ erfüllt dann}$$

(9) nach Voraussetzung.

$$2. \text{ Fall: } b = \infty : \text{ Es sei } h' = \max \{ L \cdot m, m \}$$

Wähle  $h > h'$  so, daß  $p_h > 0$ . (9) gilt dann wegen (7).

$$\Rightarrow (10) \quad \exists n_1 : h^{n_1} \geq \max \{ \bar{l}, A^{-1} \cdot L \cdot m^{n_1} \} ;$$

Wir setzen  $x_0 := h^{n_1}$ . Dann gilt

$$(11) \quad P(U_{n_1} \geq x_0) > 0,$$

denn :

$$\begin{aligned} P(U_{n_1} \geq x_0) &\geq P(U_{n_1} = h^{n_1}) \geq P(Z_n = h^n; n=0, \dots, n_1) = \\ &= \sum_{j=0}^{n_1-1} p_h^j > 0. \quad (\text{Siehe Bemerkung 0.1}) \end{aligned}$$

Da wegen (18) und (10)  $x_0 \geq \bar{x}$ , können wir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  konstruieren und Lemma 1.1 anwenden:

$$(12) \quad x_n \geq m^n \cdot A \cdot x_0 \underset{(10)}{\geq} L \cdot m^{n_1+n} \underset{(7)}{>} g(n_1+n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Daraus folgt:

$$P(U_{n_1} \geq x_0, U_{n_1+1} \geq x_1, \dots, U_{n_1+n} \geq x_n, U_{n_1+n+1} \geq x_{n+1}) =$$

$$= \sum_{j=\{x_n\}}^{\infty} P(U_{n_1} \geq x_0, \dots, U_{n_1+n-1} \geq x_{n-1}, U_{n_1+n} = j) \cdot P(S_j \geq x_{n+1}),$$

wobei  $\{x_n\} \in \mathbb{N}_0$  und  $0 \leq \{x_n\} - x_n < 1$ .

Da für  $j \geq \{x_n\}$  :

$$P(S_j \geq x_{n+1}) \underset{(1)}{=} P(S_j \geq x_n (m - x_n^{-\frac{1}{4}})) \geq P(S_j \geq j (m - j^{-\frac{1}{4}})) \geq$$

$$\underset{(5)}{\geq} P(|S_j - j| \leq j^{\frac{3}{4}}) \geq 1 - \epsilon^2 j^{-\frac{1}{2}} \geq 1 - \epsilon^2 x_n^{-\frac{1}{2}},$$

folgt:  $P(U_{n_1} \geq x_0, \dots, U_{n_1+n+1} \geq x_{n+1}) \geq P(U_{n_1} \geq x_0, \dots, U_{n_1+n} \geq x_n) \cdot$

$$\cdot (1 - \epsilon^2 x_n^{-\frac{1}{2}});$$

und durch vollständige Induktion:

$$(13) P(U_{n_1} \geq x_0, \dots, U_{n_1+n+1} \geq x_{n+1}) \geq P(U_{n_1} \geq x_0) \prod_{j=0}^n (1 - \epsilon^2 x_j^{-\frac{1}{2}})$$

Also gilt:

$$P(U_n \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0) \underset{(12)}{\geq} P(U_{n_1+n} \geq x_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0) \geq$$

$$\underset{(13)}{\geq} P(U_{n_1} \geq x_0) \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \varrho^2 x_n^{-\frac{1}{2}}) > 0,$$

$$\text{wegen (11), (8) und } \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{-\frac{1}{2}} \underset{(2)}{\leq} x_0^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} u^{-\frac{n}{2}} < \infty.$$

$$\Rightarrow Q(g) < 1$$

" $\Rightarrow$ " : Falls ein  $g(n) \geq b^n$ , folgt sofort, daß

$$Q(g) = 1,$$

$$\text{da } P(U_n \leq b^n) = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$$(14) \text{ Es sei also } \limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) m^{-n} = \infty$$

Wir wählen ein  $r \in \mathbb{N}$ , so daß

$$(15) \quad u^r \geq \bar{x}$$

Wegen (14) gibt es ein  $n_2 = n_2(r) \in \mathbb{N}$  mit

$$(16) \quad u^r \leq g(n_2) + 1$$

Es sei  $M_r(n) := \{ |U_{n_2+j} - U_{n_2+j-1} \cdot m| \leq U_{n_2+j-1}^{\frac{3}{4}} \text{ oder } U_{n_2+j} = 0; \\ j=1, \dots, n \}$

Für  $\omega \in M_r(n)$  gilt also:

$$(17) \quad \underline{U_{n_2+1}(\omega) \neq 0} \implies U_{n_2+j}(\omega) \geq U_{n_2+j-1}(\omega)^{m \cdot U_{n_2+j-1}(\omega)^{-\frac{1}{4}}} \text{ für } 1 \leq j \leq n$$

$$\implies \underline{U_{n_2+1}(\omega) \geq u^1 \cdot U_{n_2}(\omega) \geq u^{1+r}},$$

da  $U_{n_2}(\omega) \geq g(n_2) + 1 \stackrel{(16)}{\geq} u^r \stackrel{(15)}{\geq} \bar{x}$  und wegen (2).

Daraus folgt:

$$P(M_r(n+1)) \geq \quad (17)$$

$$P(M_r(n) \cap \{U_{n_2+n+1} = 0\}) + \sum_{j=\{u^{r+n}\}}^{\infty} P(M_r(n) \cap \{U_{n_2+n} = j\}) \cdot P(|S_j - j \cdot m| \leq j^{\frac{3}{4}})$$

Da für  $j \geq \{u^{r+n}\}$

$$P(|S_j - j \cdot m| \leq j^{\frac{3}{4}}) \geq 1 - \epsilon^2 u^{-\frac{r+n}{2}} \text{ wegen Lemma 1.3 gilt,}$$

und da  $\{U_{n_2+n+1} = 0\} \supset \{U_{n_2+n} = 0\}$ , folgt

$$(18) \quad P(M_r(n+1)) \geq (1 - \epsilon^2 u^{-\frac{r+n}{2}}) \cdot [P(M_r(n) \cap \{U_{n_2+n} = 0\}) + \\ + \sum_{j=\{u^{r+n}\}}^{\infty} P(M_r(n) \cap \{U_{n_2+n} = j\})] =$$

$$(17) \quad = (1 - \theta^2 u^{-\frac{r+n}{2}}) P(M_r(n))$$

$$(19) \quad P(M_r(1)) = P(|U_{n_2+1} - U_{n_2} \cdot m| \leq U_{n_2}^{\frac{3}{4}} \text{ oder } U_{n_2+1} = 0) \geq$$

$$(17) \quad \geq P(U_{n_2}=0) + \sum_{j=\{u^r\}}^{\infty} P(U_{n_2}=j) \cdot P(|S_j - j \cdot m| \leq j^{\frac{3}{4}}) \geq$$

$$\geq (1 - \theta^2 u^{-\frac{r}{2}}) \cdot (P(U_{n_2}=0) + \sum_{j=\{u^r\}}^{\infty} P(U_{n_2}=j)) =$$

$$(17) \quad = (1 - \theta^2 u^{-\frac{r}{2}})$$

Aus (18) und (19) folgt durch vollständige Induktion:

$$(20) \quad P(M_r(n+1)) \geq \prod_{j=r}^{r+n} (1 - \theta^2 u^{-\frac{j}{2}})$$

$$\text{Es sei } M_r := \left\{ |U_{n_2+j} - U_{n_2+j-1} \cdot m| \leq U_{n_2+j-1}^{\frac{3}{4}} \text{ oder } U_{n_2+j} = 0; \right.$$

$$M_r = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_r(n) \quad \left. \text{für alle } j \in \mathbb{N} \right\}$$

Wir zeigen:  $M_r \subset \{U_n = 0 \text{ für schließlich alle } n \in \mathbb{N}\}$

Für jedes  $\omega \in M_r$  gilt:

$$(21) \quad U_{n_2+j}(\omega) \leq U_{n_2+j-1}(\omega) \cdot m + U_{n_2+j-1}^{\frac{3}{4}}(\omega) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}$$

Wir setzen  $y_0 = U_{n_2}(\omega)$ , falls  $U_{n_2}(\omega) > 0$ .

Wegen (3) und (21) gilt dann

$$y_n \geq U_{n_2+n}(\omega) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{Wegen (14) } \exists n_3 : g(n_2 + n_3) m^{-n_2 - n_3} \geq m^{-n_2} \cdot y_0 \cdot B$$

$$\Rightarrow m^{n_3} y_0 \cdot B \leq g(n_2 + n_3)$$

$$\Rightarrow U_{n_2+n_3}(\omega) \leq y_{n_3} \stackrel{(4)}{\leq} m^{n_3} \cdot y_0 \cdot B \leq g(n_2 + n_3)$$

$$\Rightarrow U_{n_2+n_3}(\omega) = 0$$

$$\Rightarrow U_n(\omega) = 0 \text{ für alle } n \geq n_2 + n_3$$

Also folgt:

$$1 \geq Q(g) \geq P(M_r) \stackrel{(20)}{\geq} \prod_{j=r}^{\infty} (1 - \epsilon^2 u^{-\frac{j}{2}}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1,$$

$$\text{da } \sum_{j=0}^{\infty} u^{-\frac{j}{2}} < \infty.$$

q.e.d.

## Kapitel 2

Der Fall :  $1 < m < \infty$  ,  $\sigma^2 = \infty$

Im Falle  $1 < m$ ,  $\sigma^2 < \infty$  ist schon lange bekannt, daß die Zufallsvariablen  $m^{-n} \cdot Z_n$  fast sicher und im quadratischen Mittel gegen eine Zufallsvariable  $W$  mit  $P(W > 0) = 1 - q$  ( $> 0$ ) und  $E(W) = 1$  konvergieren. (Siehe [4] , Kapitel I, Theorem 8.1, Seite 13)

E. Seneta (1968/69) [8;9] hat darüber hinaus gezeigt, daß für  $1 < m < \infty$  (auch wenn  $\sigma^2 = \infty$ ) stets Konstanten  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  existieren, so daß  $C_n^{-1} Z_n$  in der Verteilung schwach gegen eine reellwertige Zufallsvariable  $W$  mit  $P(W > 0) = 1 - q$  konvergiert. Mit Hilfe eines Martingalarguments (siehe Lemma 2.2) beweist C. C. Heyde (1970) [5] , daß  $C_n^{-1} Z_n$  sogar fast überall gegen  $W$  konvergiert.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse von E. Seneta und C. C. Heyde (siehe Satz 2.1) können wir das in Kapitel 1, Satz 1.1, gefundene Kriterium für  $Q(g)$  auf den Fall  $1 < m < \infty$  ,  $\sigma^2 = \infty$  ausdehnen.

Zunächst müssen einige technische Hilfsmittel bereitgestellt werden.

### Definition 2.1:

$\mathcal{L}$  sei der natürliche Borelkörper auf  $[0, \infty[$  und  $v$  sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $([0, \infty[ , \mathcal{L})$

a)  ${}_v f(s) := \int_0^{\infty} s^t v(dt) , s \in [0, 1]$

ist die erzeugende Funktion von  $v$

b)  ${}_v \varphi(s) := {}_v f(e^{-s}) = \int_0^{\infty} e^{-st} v(dt) , s \in [0, \infty [$

ist die Laplace-Transformierte von  $v$

c)  ${}_v k(s) := -\log {}_v \varphi(s) = -\log {}_v f(e^{-s}) , s \in [0, \infty [$

ist die sogenannte "Kumulanten-erzeugende Funktion"

von  $v$ . (Englisch: cumulant generating function; siehe

z.B. [9] )

d) Ist eine Zufallsvariable  $X$  mit Werten in  $[0, \infty [$

nach  $v$  verteilt, so spricht man auch von der erzeugenden

Funktion  ${}_X f$  (bzw. Laplace-Transformierten  ${}_X \varphi$ , bzw. Kum-

ulanten-erzeugenden Funktion  ${}_X k$ ) von  $X$ .

#### Bemerkung 2.1:

$v_1$  und  $v_2$  seien zwei Verteilungen auf  $([0, \infty[, \mathcal{L})$ . Bekanntlich gilt dann für die Faltung  $v_1 * v_2$ :

$$(1) \quad (v_1 * v_2)^f = (v_1^f) \cdot (v_2^f); \quad (v_1 * v_2)^\varphi = (v_1^\varphi) \cdot (v_2^\varphi)$$

#### Bezeichnungen:

a) Ist speziell  $v = p$ , die Nachwuchsverteilung unseres Galton-Watson-Prozesses (= Verteilung von  $Z_1$ ), so schreiben wir:

$$f := p^f = Z_1^f; \quad k := p^k = Z_1^k$$

b) Die n-ten Iterierten  $f_n$  (bzw.  $k_n$ ) von  $f$  (bzw.  $k$ ) sind für  $n \in \mathbb{N}_0$  wie folgt definiert:

$$f_0(s) = s ; f_{n+1}(s) = f(f_n(s)) \quad s \in [0,1]$$

$$(k_0(s) = s ; k_{n+1}(s) = k(k_n(s)) \quad s \in [0, \infty[ ).$$

Bemerkung 2.2:

Man sieht sofort, daß  $f_1 = f$  und  $k_1 = k$ .

Wegen

$$-\log f(\exp(-(-\log f_n(e^{-s})))) = -\log f_{n+1}(e^{-s})$$

folgt, daß

$$(2) k_n(s) = -\log f_n(e^{-s}), \quad s \in [0, \infty[ ; \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Es seien nun die wichtigsten Eigenschaften von  $f$  zusammengestellt. Näheres findet man bei [1] und [4] .

$$(3) f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \cdot s^j, \quad s \in [0,1] ;$$

$$f_n(1) = 1, \quad m = f'(1) = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j$$

$$(4) \quad \zeta^2 = f''(1) + m - m^2 = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 p_j - m^2$$

$$\text{d.h. } \zeta^2 = \infty \iff f''(1) = \infty .$$

$$(5) m > 1 \implies q < 1 ;$$

$f_n$  hat in  $[0,1]$  nur die Fixpunkte  $q$  und  $1$ .

( $q$  = Aussterbewahrscheinlichkeit von  $(Z_n)$ )

- (6) Wenn  $p_0 \neq 1$ , ist  $f_n$  eine streng monoton wachsende, streng konvexe, stetige Funktion.

Die zu  $f_n$  inverse Funktion

$$f_n^{(-1)} : [f_n(0), 1] \longrightarrow [0, 1]$$

ist folglich streng monoton wachsend, streng konkav und stetig und es gilt

$$(7) f_n^{(-1)} = (f^{(-1)})_n.$$

$$(8) s < f_1(s) < \dots < f_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q \quad 0 \leq s < q$$

$$s > f_1(s) > \dots > f_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q \quad q < s < 1$$

- (9) Für alle  $q < s \leq 1$  gilt:

$$s \leq f_1^{(-1)}(s) \leq \dots \leq f_n^{(-1)}(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

denn:

$$q \geq f_n(0) \implies \text{alle } f_n^{(-1)}(s) \text{ sind wohldefiniert;}$$

$$q < s \implies q = f_n^{(-1)}(q) < f_n^{(-1)}(s)$$

$$\implies f_n^{(-1)}(s) = f(f_{n+1}^{(-1)}(s)) \leq f_{n+1}^{(-1)}(s) ;$$

$$q < s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(-1)}(s) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}^{(-1)}(s)) =$$

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(-1)}(s)) \leq 1 \xRightarrow{(5)} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(-1)}(s) = 1.$$

Aus den Eigenschaften von  $f$  ergibt sich für die Kumulanten-  
erzeugende Funktion  $k$ , falls  $m > 1$  und  $0 < r := -\log q \leq \infty$  :

$$(10) \quad k_n(0) = 0, \quad k'(0) = \frac{f'(1)}{f(1)} = m,$$

$$k_n(s) > s \quad \text{für } 0 < s < r$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} k_n(s) = -\log f_n(0) \quad (2)$$

(11) Falls  $q > 0$ , ist  $r$  der einzige Fixpunkt von  $k$  in

$$]0, \infty[$$

(12)  $k_n$  ist streng monoton wachsend, stetig und konkav auf

$$[0, \infty[$$

$$\text{denn: } k'_n(s) = \frac{f'_n(e^{-s})}{f_n(e^{-s})} \cdot e^{-s} > 0 \quad \text{für alle } s \geq 0;$$

Es sei  $0 < \alpha, \beta < 1$  mit  $\alpha + \beta = 1$ ;  $0 \leq s, t < \infty$ .

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung (siehe z.B. [3],

Seite 155) folgert man:

$$\begin{aligned} \alpha k(s) + \beta k(t) &= -\alpha \log f(e^{-s}) - \beta \log f(e^{-t}) = \\ &= -\log \left[ \left( \sum_j p_j (\exp(-\alpha s j))^{\frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha \left( \sum_j p_j (\exp(-\beta t j))^{\frac{1}{\beta}} \right)^\beta \right] \leq \\ &\leq -\log \left[ \sum_j p_j (\exp(-\alpha s j)) (\exp(-\beta t j)) \right] = \\ &= -\log f(e^{-(\alpha s + \beta t)}) = k(\alpha s + \beta t). \end{aligned}$$

Die Konkavität von  $k_n$  zeigt man analog.

### Bemerkung 2.3:

Wegen (12) hat  $k_n$  eine inverse Funktion

$$h_n : [0, -\log f_n(0)[ \longrightarrow [0, \infty[$$

und es gilt:

$$(13) \quad h_n(s) = -\log f_n^{(-1)}(e^{-s}), \quad s \in [0, -\log f_n(0)[$$

(14)  $h_n$  ist die  $n$ -te Iterierte von  $h := h_1$

$$(15) \quad h_n(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(s)}{s} = h'(0) = [k'(h(0))]^{-1} = m^{-1}$$

(16)  $h_n$  ist streng monoton wachsend, stetig und konvex auf  $[0, -\log f_n(0)]$

(17) Da  $r \leq -\log f_n(0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} r$  wegen (8), ist  $h_n(s)$  für alle  $0 \leq s \leq r$  definiert.

Aus (8) folgt für alle  $s \in [0, r[$

(18)  $s \geq h(s) \geq h_2(s) \geq \dots \geq h_n(s) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$

Die Bedeutung der erzeugenden Funktion für das Studium der Eigenschaften des Galton-Watson-Prozesses  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  liegt vor allem in der folgenden Beziehung:

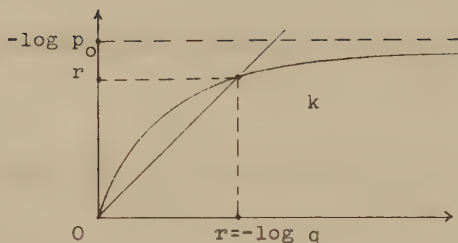
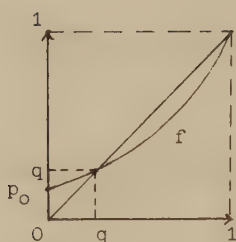
(19) Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  hat  $Z_n$  die erzeugende Funktion  $\boxed{Z_n^f = f_n}$ .  
(Siehe z.B. [4], Kapitel I, Theorem 4.1, Seite 5)

Wegen (2) gilt das Analoge für die Kumulanten-erzeugende Funktion:

(20)  $\boxed{Z_n^k = k_n}$

Mit Hilfe von erzeugenden oder Kumulanten-erzeugenden Funktionen kann man also die Verteilungen der Zufallsvariablen  $Z_n$  in einfacher Weise beschreiben.

Die spezielle Bedeutung der Kumulanten-erzeugenden Funktion sehen wir in Lemma 2.1, Lemma 2.2 und Satz 2.1.



Bemerkung 2.4:

$(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  sei ein Galton-Watson-Prozeß. I sei ein Individuum der  $u$ -ten Generation,  $u \in \mathbb{N}_0$ .

Die Nachkommen von I in der  $(n + u)$ -ten Generation bezeichnen wir als die  $n$ -Nachkommen von I ( $n \in \mathbb{N}_0$ ).

I selbst ist der 0-Nachkomme, die Kinder sind die 1-Nachkommen, die Enkel die 2-Nachkommen, usw.

Es sei  $1 \leq t < \infty$ .

Unter der Bedingung  $Z_u = t$  (die  $u$ -te Generation bestehe also aus den Individuen  $I_1, I_2, \dots, I_t$ ) bezeichnen  $\hat{Z}_n^{(j)}$  die Anzahl der  $n$ -Nachkommen von  $I_j$ ,  $1 \leq j \leq t$ . (Mit den Bezeichnungen von Definition 0.1 ist speziell  $\hat{Z}_1^{(j)} = Y_j^{(u)}$ .)

Durch wiederholtes Anwenden von Definition 0.1 ergibt sich, daß  $(\hat{Z}_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}_0}, \dots, (\hat{Z}_n^{(t)})_{n \in \mathbb{N}_0}$  bezüglich der bedingten Wahrscheinlichkeit  $P(.|Z_u = t)$  unabhängige Galton-Watson-Prozesse sind, die alle wie  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  von  $p$  gesteuert werden. (Siehe hierzu auch [4] und [1]).

(21) Für jedes  $1 \leq t' \leq t$  gilt also:

Verteilung von  $(\sum_{j=1}^{t'} \hat{Z}_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}_0}$  bezüglich  $P(.|Z_u=t')$

= Verteilung von  $(\sum_{j=1}^{t'} \hat{Z}_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}_0}$  bezüglich  $P(.|Z_u=t)$

=  $t'$ -fache Faltung der Verteilung von  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

(22)  $Z_u = t \implies Z_{u+n} = \sum_{j=1}^t \hat{Z}_n^{(j)}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$

Speziell:  $Z_{u+1} = \sum_{j=1}^t \hat{Z}_1^{(j)} (= \sum_{j=1}^t Y_j^{(u)})$

(23)  $Z_{u+1}$  hat also wegen (22) und (1) bezüglich  $P(.|Z_u=t)$  die erzeugende Funktion  $[f(s)]^t$ ,  $0 \leq s \leq 1$ .

### Lemma 2.1:

$L > 0$  sei eine beliebige Konstante;  $n \in \mathbb{N}_0$

a)  $L \cdot Z_n f(s) = f_n(s^L)$ ,  $0 \leq s \leq 1$

Inverse Funktion:  $(f_n^{(-1)}(s))^{\frac{1}{L}}$ ,  $f_n(0) \leq s \leq 1$ .

b)  $L \cdot Z_n k(s) = k_n(L \cdot s)$ ,  $0 \leq s < \infty$

Inverse Funktion:  $\frac{1}{L} \cdot h_n(s)$ ,  $0 \leq s < -\log f_n(0)$ .

### Beweis:

Wir beweisen den Fall  $n = 1$ , alles andere geht analog.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } L \cdot Z_1 f(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(L \cdot Z_1 = L \cdot j) \cdot s^{L \cdot j} = \sum_{j=0}^{\infty} P(Z_1 = j) (s^L)^j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j (s^L)^j = f(s^L) ; \\
 (f^{(-1)}(f(s^L)))^{\frac{1}{L}} &= (s^L)^{\frac{1}{L}} = s ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } L \cdot Z_1 k(s) &= -\log(L \cdot Z_1 f(e^{-s})) = -\log f((e^{-s})^L) = \\
 &= -\log f(e^{-L \cdot s}) = k(L \cdot s) ;
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{L} (h(k(L \cdot s))) = \frac{L \cdot s}{L} = s ;$$

q.e.d.

Die inverse Funktion der Kumulanten-erzeugenden Funktion von  $L \cdot Z_n$  ist also das  $\frac{1}{L}$ -fache der "ursprünglichen" Funktion  $h_n(s)$ . Diese einfache Beziehung ermöglicht es, die Auswirkungen einer Konstanten  $L$  auf die Verteilung von  $Z_n$  näher zu untersuchen. (Siehe hierzu z.B. Satz 2.1; Kapitel 3, Beweis von Satz 3.2 (2))

Eine weitere wichtige Eigenschaft von  $h$  bringt das folgende Lemma.

Lemma 2.2:

( $\Omega$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $P$ ,  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ) sei ein Galton-Watson-Prozeß mit  $m > 1$ , und  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}$  sei der von  $Z_0, Z_1, \dots, Z_n$  erzeugte  $\sigma$ -Körper,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Es sei  $t_0 \in ]0, r[$  beliebig, aber fest gewählt.

$X_n := \exp(-h_n(t_0) \cdot Z_n)$  für  $n \in \mathbb{N}_0$

Dann ist die Familie  $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Martingal.

Daher existiert

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \quad \text{fast sicher}$$

und es gilt

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = e^{-t_0}$$

Beweis:

$X_n$  ist  $\mathcal{B}_n - \mathcal{L}$  - meßbar nach Definition.

Für jedes  $j \in \mathbb{N}_0$  sei  $P_j$  die Verteilung von  $Z_{n+1}$  bezüglich  $P(\cdot | Z_n = j)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} | Z_0, \dots, Z_n) &= E(\exp(-h_{n+1}(t_0) \cdot Z_{n+1}) | Z_n) = \\ &= \int_0^\infty \exp(-h_{n+1}(t_0)) x P_{Z_n}(dx) \stackrel{(23)}{=} (f(\exp(-h_{n+1}(t_0))))^{Z_n} = \\ &= \exp \left[ (-\log f(\exp(-h_{n+1}(t_0)))) \cdot Z_n \right] = \\ &= \exp \left[ -k(h_{n+1}(t_0)) \cdot Z_n \right] = \exp \left[ -h_n(t_0) \cdot Z_n \right] = \\ &= X_n \quad (\text{fast sicher}) \end{aligned}$$

Nach dem Martingalkonvergenzsatz konvergieren die  $X_n$  fast sicher, weil alle  $X_n \geq 0$ .

Da  $0 \leq X_n \leq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ , folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz, daß  $E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n)$ .

Da  $(X_n)_n$  ein Martingal, gilt

$$E(X_n) = E(X_1) = \int_0^{\infty} \exp(-h(t_0))^x p(dx) =$$

$$= f(\exp(-h(t_0))) = f(f^{(-1)}(e^{-t_0})) = e^{-t_0}$$

q.e.d.

Definition 2.2:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien zwei Folgen reeller Zahlen.

Wir schreiben

$$a_n \sim b_n : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n^{-1} = 1$$

Wir wollen jetzt die Ergebnisse von E. Seneta und C.C.Heyde zitieren.

Satz 2.1:

Es sei  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ein Galton-Watson-Prozeß mit  $1 < m < \infty$ .

1) Es gibt stets eine Folge von positiven Konstanten

$(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $C_n \rightarrow \infty$  und  $C_n^{-1} C_{n+1} \rightarrow m$ , so daß die Zufallsvariablen  $W_n = C_n^{-1} Z_n$  fast sicher gegen eine reellwertige Zufallsvariable  $W$  mit  $P(W > 0) = 1 - q (> 0)$  konvergieren.

2) Es sei  $s_0 \in ]0, r[$  beliebig, aber fest gewählt.

$$C_n := (h_n(s_0))^{-1}, n \in \mathbb{N}_0, \text{ erfüllen 1)}$$

3) Zu jeder Folge von Konstanten  $(C_n)$ , die 1) erfüllt, gibt es ein  $\alpha \in ]0, \infty[$  mit  $C_n \sim \alpha \cdot (h_n(s_0))^{-1}$ .

Insbesondere gilt:

$$(24) \quad h_n(s) = \alpha_s h_n(s_0) \quad \text{für alle } s \in ]0, r[ \\ \text{und geeignete } \alpha_s \in ]0, \infty[$$

4) a) Gilt zusätzlich  $\underline{E(Z_1 \log Z_1)} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j j \log j < \infty$ ,  
so ist

$$(25) \quad 0 < E(W) < \infty \quad \text{und}$$

$$(26) \quad (h_n(s_0))^{-1} \sim \alpha m^n \quad \text{für ein } 0 < \alpha < \infty$$

Man kann also speziell

$$(27) \quad C_n = m^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

setzen, und für diese Wahl der  $C_n$  gilt dann  $E(W) = 1$ .

Das ist aber nichts anderes, als das im Spezialfall  
 $\sigma^2 < \infty$  ( $\Rightarrow E(Z_1 \log Z_1) < \infty$ ) bereits bekannte Kon-  
vergenzverhalten von  $m^{-n}Z_n$ .

b) Gilt  $\underline{E(Z_1 \log Z_1)} = \infty$ , so ist

$$(28) \quad E(W) = \infty \quad \text{und}$$

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (h_n(s_0))^{-1} \cdot m^{-n} = 0$$

$(m^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  erfüllt also 1) nicht. Die Zufallsvariablen  
 $m^{-n}Z_n$  konvergieren fast sicher gegen 0.

Beweis: Siehe

1) Athreya-Ney [1], Kapitel I, Teil C, § 10,

(insbesondere Theorem 3). Ab Seite 24.

2) E. Seneta [9], 4.1.-4.4. Ab Seite 21

3) C. C. Heyde [5]

Bemerkung 2.5:

(zu Satz 2.1, 4))

N. Levinson (1959) [7] hat als erster gezeigt, daß im Falle  $\sigma^2 = \infty$   $m^{-n} Z_n$  fast sicher gegen 0 konvergieren kann.

H. Kesten und B. P. Stigum (1966) [6] haben dann (in allgemeinerem Zusammenhang) bewiesen, daß  $m^{-n} Z_n$  fast sicher gegen eine Zufallsvariable  $\tilde{W}$  konvergiert und daß

$$E(Z_1 \log Z_1) < \infty \implies P(\tilde{W}=0) = q$$

$$E(Z_1 \log Z_1) = \infty \implies P(\tilde{W}=0) = 1$$

Korollar zu Satz 2.1:

Es sei  $1 < m < \infty$  und  $\sigma^2 = \infty$

Mit den Bezeichnungen von Satz 2.1 gilt

$$(30) P(W > c) > 0 \quad \text{für alle } c \in ]0, \infty[$$

Beweis:

Es seien  $0 < A < \infty$  mit  $A \leq E(W) = \int W dP$

und  $B := \max \{C_n^{-1} C_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \quad (< \infty).$

Dann gilt

$$(31) P(W \geq A) > 0$$

Wähle  $t$  so, daß  $t \cdot A > c \cdot B$  und  $p_t > 0$ .

$$P(W > c) \geq P(W > c, Z_1 = t) =$$

$$= P(\lim_n C_n^{-1} Z_n > c \mid Z_1 = t) P(Z_1 = t) =$$

$$(22) = P(\lim_n C_n^{-1} \sum_{j=1}^t \hat{Z}_{n-1}^{(j)} > c \mid Z_1 = t) p_t \geq$$

$$\geq P(\lim_n \sum_{j=1}^t C_n^{-1} \hat{Z}_{n-1}^{(j)} > c \cdot B \mid Z_1 = t) p_t \geq$$

$$\geq P (\forall 1 \leq j \leq t : \lim_{n \rightarrow \infty} C_{n-1}^{-1} \hat{Z}_{n-1}^{(j)} > c \cdot B t^{-1} | Z_1 = t) p_t =$$

$$= \prod_{j=1}^t P (\lim_{n \rightarrow \infty} C_{n-1}^{-1} \hat{Z}_{n-1}^{(j)} > c \cdot B t^{-1} | Z_1 = t) p_t =$$

$$(21) \quad (P (W > c \cdot B \cdot t^{-1}))^t p_t > (P (W \geq A))^t p_t \quad \underline{\underset{(31)}{>}} \quad 0.$$

q.e.d.

Definition 2.3:

$$\varphi(s) := 1 - f^{(-1)}(1-s), \quad s \in [0, 1-p_0]$$

Für die Iterierten ergibt sich unmittelbar:

$$\varphi_n(s) = 1 - f_n^{(-1)}(1-s), \quad s \in [0, 1-f_n(0)] \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Lemma 2.3:

Zu jedem  $s \in ]0, r[$  gibt es ein  $t \in ]0, 1-q[$

und zu jedem  $t \in ]0, 1-q[$  ein  $s \in ]0, r[$

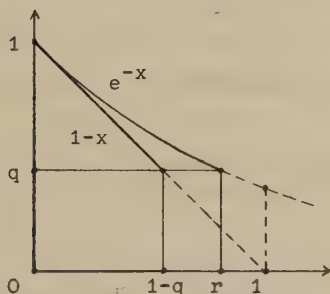
so daß

$$h_n(s) \sim \varphi_n(t)$$

Beweis:

Zu  $0 < s < r (= -\log q)$  gibt es genau ein

$0 < t < 1-q$  mit  $e^{-s} = 1-t$  und umgekehrt.



$$\Rightarrow \frac{h_n(s)}{\varphi_n(t)} = \frac{-\log f_n^{(-1)}(e^{-s})}{1 - f_n^{(-1)}(1-t)} = \frac{-\log f_n^{(-1)}(e^{-s})}{1 - f_n^{(-1)}(e^{-s})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

$$\text{denn } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\log x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x}}{-1} = 1. \text{ (l'Hospital)}$$

q.e.d.

Bemerkung 2.6:

Aus Lemma 2.3 folgt, daß man in Satz 2.1  $h_n(s_0)$  durch den einfacheren Ausdruck  $g_n(t_0)$  ersetzen kann.

Wir können nun ein dem Satz 1.1 entsprechendes Kriterium für die Aussterbewahrscheinlichkeit des Verzweigungsprozesses  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit unterer Schranke  $g$  beweisen.

Satz 2.2:

Falls  $1 < m < \infty$  und  $\sigma^2 = \infty$ , gilt:

$$Q(g) < 1 \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) \cdot C_n^{-1} < \infty$$

$$\text{wobei } C_n = \begin{cases} m^n & \text{für } E(Z_1 \log Z_1) < \infty \\ (g_n(t_0))^{-1} & \text{für } E(Z_1 \log Z_1) = \infty \end{cases}$$

und  $t_0 \in ]0, 1-q[$  beliebig, aber fest gewählt.

$$(32) \quad E(Z_1 \log Z_1) = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n(t_0))^{-1} \cdot m^{-n} = 0.$$

Beweis:

Aus Lemma 2.3 und (27) folgt, daß die  $C_n$  in jedem Fall die Aussage 1) von Satz 2.1 erfüllen. (32) folgt unmittelbar aus Lemma 2.3 und (29).

" $\Leftarrow$ " : Es sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) \cdot C_n^{-1} < L < \infty$  so gewählt, daß

$$(33) \quad g(n) < L \cdot C_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(W_1 > L \text{ für alle } l > n) = P(W > L) > 0 \quad (30)$$

folgt, daß es ein  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  gibt mit

$$P(W_1 > L \text{ für alle } l > n_0) > 0.$$

$$P(W_1 > L \text{ für alle } l > n_0) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} P(W_1 > L \text{ für alle } l \geq n_0 + 1 \mid Z_{n_0} = s) P(Z_{n_0} = s)$$

$$\Rightarrow \exists s_0 \in \mathbb{N}_0 : P(W_1 > L \text{ für alle } l \geq n_0 + 1 \mid Z_{n_0} = s_0) > 0.$$

Daraus folgt für alle  $s \geq s_0$ :

$$(34) \quad \underline{P(W_1 > L \text{ für alle } l \geq n_0 + 1 \mid Z_{n_0} = s) =}$$

$$= P(Z_1 > C_1 L \text{ für alle } l \geq n_0 + 1 \mid Z_{n_0} = s) =$$

$$(22) \quad P\left(\sum_{j=1}^s \hat{Z}_{1-n_0}^{(j)} > C_1 L \text{ für alle } l \geq n_0 + 1 \mid Z_{n_0} = s\right) \geq$$

$$\geq P\left(\sum_{j=1}^{s_0} \hat{Z}_{1-n_0}^{(j)} > C_1 L \text{ für alle } l \geq n_0 + 1 \mid Z_{n_0} = s\right) =$$

$$(21) \quad P\left(\sum_{j=1}^{s_0} \hat{Z}_{1-n_0}^{(j)} > C_1 L \text{ für alle } l \geq n_0 + 1 \mid Z_{n_0} = s_0\right) =$$

$$(22) \quad P(W_1 > L \text{ für alle } l \geq n_0 + 1 \mid Z_{n_0} = s_0) > 0$$

Da  $G^2 = \infty$ , gibt es ein  $d \in \mathbb{N}$  mit

$$(35) \quad d > \max \left\{ g(1), g(2)^{\frac{1}{2}}, \dots, g(n_0)^{\frac{1}{n_0}}, s_0^{\frac{1}{n_0}} \right\} \quad \text{und} \\ p_d > 0; \text{ daraus folgt}$$

$$(36) \quad \underline{P(Z_1 > g(1), \dots, Z_{n_0-1} > g(n_0-1), Z_{n_0} = d^{n_0})} \geq$$

$$P(Z_1 = d, \dots, Z_{n_0-1} = d^{n_0-1}, Z_{n_0} = d^{n_0}) =$$

$$= \prod_{j=0}^{n_0-1} p_d^{d^j} > 0; \quad d^{n_0} > s_0$$

$$\underline{1 - Q(g)} = P(U_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0) \geq$$

$$\stackrel{(33)(35)}{>} P(Z_1 > g(1), \dots, Z_{n_0-1} > g(n_0-1); Z_{n_0} = d^{n_0}; Z_n > C_n L$$

$$\text{für alle } n \geq n_0 + 1) =$$

$$= P(W_n > L \text{ für alle } n \geq n_0 + 1 | Z_{n_0} = d^{n_0}) \cdot$$

$$\cdot P(Z_1 > g(1), \dots, Z_{n_0-1} > g(n_0-1); Z_{n_0} = d^{n_0}) >$$

$$\underline{> 0} \text{ wegen (34) und (36).}$$

" $\Rightarrow$ ": Es sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) C_n^{-1} = \infty$ , dann gibt es eine

Folge  $(n_l)_{l \in \mathbb{N}}$  von natürlichen Zahlen mit  $\lim_{l \rightarrow \infty} C_{n_l} \cdot (g(n_l))^{-1} = 0$ .

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} Z_{n_l} \cdot (g(n_l))^{-1} &= (\lim_{l \rightarrow \infty} C_{n_l}^{-1} Z_{n_l}) (\lim_{l \rightarrow \infty} C_{n_l} \cdot (g(n_l))^{-1}) = \\ &= W \cdot O = O \text{ fast überall.} \end{aligned}$$

Es gibt folglich zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $l_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$P(Z_{n_l} \cdot (g(n_l))^{-1} \leq 1 \text{ für alle } l \geq l_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \underline{Q}(g) = P(U_n = 0 \text{ schließlich}) \geq P(Z_{n_{l_\varepsilon}} \leq g(n_{l_\varepsilon}))$$

$$\geq P(Z_{n_l} \cdot (g(n_l))^{-1} \leq 1 \text{ für alle } l \geq l_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$$

q.e.d.

### Bemerkung 2.7:

Man kann bei Satz 2.2 den Fall  $m > 1, G^2 < \infty$  (insbesondere für  $b := \max \{j \mid p_j \neq 0\} < \infty$ ) durch leichte Modifikation des Beweises und des Korollars zu Satz 2.1 mitbeweisen.

Da der Fall  $m > 1, G^2 < \infty$  in Kapitel 1 (Satz 1.1) mit elementaren Mitteln gelöst werden konnte, begnügen wir uns hier, Satz 2.2 für  $G^2 = \infty$  zu beweisen.

Zum Abschluß dieses Kapitels sollen noch zwei Beispiele betrachtet werden.

Definition 2.4:

Für jede reelle Zahl  $\beta$  und jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  seien die Binomialkoeffizienten  $\binom{\beta}{n}$  wie üblich definiert durch

$$\binom{\beta}{0} := 1 \quad ; \quad \binom{\beta}{n} := \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\beta-j)}{n!}$$

Satz 2.3:

$\beta$  sei eine reelle Zahl und  $\beta \notin \mathbb{N}_0$ .

Dann gibt es eine Konstante  $C = C(\beta) > 0$  mit

$$\left| \binom{\beta}{n} \right| \sim C \cdot n^{-(1+\beta)}$$

Beweis:

Da  $\beta \notin \mathbb{N}_0$ , ist  $\binom{\beta}{n} \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

1) Es sei  $\overline{\Pi}(n) := \prod_{j=0}^n |j - \beta|$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Ähnlich wie die Stirlingsche Formel

$$(37) \quad n! \sim K_1 \cdot e^{-n} \cdot n^{n+\frac{1}{2}}$$

beweisen wir zunächst:

$$(38) \quad \overline{\Pi}(n) \sim K_2 \cdot e^{-n} (n - \beta)^{n-\beta+\frac{1}{2}},$$

wobei  $K_1, K_2 > 0$  geeignete Konstanten sind.

(Siehe etwa [2], Kapitel II, 9; Seite 52)

$$(39) \quad x_n := \frac{\prod (n)}{e^{-n}(n-\beta)^{n-\beta+\frac{1}{2}}}$$

Für alle  $n > \beta$  gilt dann

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{e^{-n-1}(n+1-\beta)^{n+1-\beta+\frac{1}{2}}}{e^{-n}(n-\beta)^{n-\beta+\frac{1}{2}}(n+1-\beta)} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n-\beta}\right)^{n-\beta+\frac{1}{2}}$$

$$(40) \quad \log \frac{x_n}{x_{n+1}} = \left[(n-\beta+\frac{1}{2}) \log \left(1 + \frac{1}{n-\beta}\right)\right] - 1$$

Wir setzen  $x = (2n - 2\beta + 1)^{-1}$ ;  $\Rightarrow 0 < x < 1$

$$(41) \quad (n-\beta+\frac{1}{2}) = (2x)^{-1}; \quad \left(1 + \frac{1}{n-\beta}\right) = \frac{(2n-2\beta+1)+1}{(2n-2\beta+1)-1} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{Da } \log \frac{1+x}{1-x} = 2x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{2j+1}, \text{ folgt}$$

$$(42) \quad \log \frac{x_n}{x_{n+1}} \stackrel{(40)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{2j}}{2j+1} <$$

$$(43) < \frac{x^2}{3} \sum_{j=0}^{\infty} x^{2j} = \frac{x^2}{3(1-x^2)} = \frac{1}{3} (x^{-2} - 1)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{3} ((2n-2\beta+1)^2 - 1)^{-1} = \frac{1}{12} (n(n+1) - (2\beta n + (\beta-\beta^2)))^{-1}$$

$$(42), (43) \Rightarrow 1 < \frac{x_n}{x_{n+1}} < \exp \left( \frac{1}{12} (n(n+1) - (2\beta n + (\beta-\beta^2)))^{-1} \right)$$

$\Rightarrow$  für  $n > \beta$  ist  $x_n$  monoton fallend und  $x_n > 0$ .

Daraus folgt

$$(44) \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = K_2 \geq 0$$

Da  $2\beta n + (\beta - \beta^2) \leq \frac{1}{2} n(n+1)$  für schließlich alle  $n$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x_n}{x_{n+1}} < \exp\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n(n+1)}\right) = \exp\left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

für schließlich alle  $n$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{x_{n+j}} < \exp\left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+j}\right)\right) \text{ für alle } j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{K_2} \leq \exp\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n}\right) < \infty \text{ für schließlich alle } n.$$

$$\Rightarrow K_2 > 0; \xrightarrow{(39)(44)} \Pi(n) \sim K_2 e^{-n} (n-\beta)^{n-\beta+\frac{1}{2}}$$

$$2) \quad \left| \binom{\beta}{n} \right| = \frac{\Pi(n-1)}{n!} \sim \frac{K_2 e}{K_1} \frac{(n-1-\beta)^{n-\frac{1}{2}-\beta}}{n^{n+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{K_2 \cdot e}{K_1} \cdot \left(\frac{n-1-\beta}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}-\beta} \cdot \frac{1}{n^{1+\beta}};$$

$$\left(\frac{n-1-\beta}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}-\beta} = \left[\left(1 - \frac{1+\beta}{n}\right)^{-\frac{n}{1+\beta}}\right]^{-(1+\beta)} \cdot \left(1 - \frac{1+\beta}{n}\right)^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-(1+\beta)} \cdot 1;$$

Daraus folgt für  $C = e^{-\beta} K_1^{-1} K_2 > 0$  :

$$\left| \binom{\beta}{n} \right| \sim C \cdot n^{-(1+\beta)} \quad \text{q.e.d.}$$

### Beispiel 2.1:

Die Nachwuchsverteilung  $p$  sei gegeben durch

$$p_0 = \frac{1}{2}, \quad p_1 = 0, \quad p_n = (-1)^n \binom{\frac{3}{2}}{n} = \left| \binom{\frac{3}{2}}{n} \right| \quad \text{für } n \geq 2.$$

$$\Rightarrow 0 \leq p_n < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0;$$

Erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{3}{2}}{n} s^n = \frac{3}{2} s - \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{3}{2}}{n} (-s)^n = \\ &= \frac{3}{2} s - \frac{1}{2} + (1-s)^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq s \leq 1; \end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1;$$

$$f'(s) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} (1-s)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \underline{m} = f'(1) = \underline{\frac{3}{2}}$$

$$f''(s) = \frac{3}{4} (1-s)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(1) = \infty \Rightarrow \underline{\underline{G^2 = \infty}}_{(4)}$$

Aus Satz 2.3 folgt:

$$\begin{aligned} (45) \quad (n \log n) p_n &= (n \log n) \left| \binom{\frac{3}{2}}{n} \right| \sim C \frac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}} = \\ &= C \cdot n^{-(1+\frac{1}{4})} \cdot \frac{\log n}{n^{\frac{1}{4}}}; \end{aligned}$$

$$(46) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^{\frac{1}{4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{1}{4} n^{-\frac{3}{4}} \right)^{-1} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{4}} = 0 ;$$

$$\implies \exists C' > 0 : (n \log n) p_n \leq C' \cdot n^{-(1+\frac{1}{4})} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 ,$$

(45)(46)

$$\underline{E(Z_1 \log Z_1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (n \log n) p_n \leq C' \sum_{n=0}^{\infty} n^{-(1+\frac{1}{4})} < \infty$$

Für den zugehörigen Prozeß  $(U_n)$  mit unterer Schranke  $g$  gilt folglich:

$$Q(g) < 1 \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \infty .$$

### Beispiel 2.2:

$$(47) \quad \sum_{n=2}^{\infty} (n \log n)^{-1} = \infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n(\log n)^2)^{-1} < \infty$$

Nach dem Verdichtungssatz für Reihen gilt nämlich, daß

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n \log n)^{-1} \text{ divergiert, weil } \sum_{j=1}^{\infty} 2^j (2^j \log 2^j)^{-1} =$$

$$= (\log 2)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} \text{ divergiert, und daß}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n(\log n)^2)^{-1} \text{ konvergiert, weil } \sum_{j=1}^{\infty} 2^j (2^j (\log 2^j)^2)^{-1} =$$

$$= (\log 2)^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} \text{ konvergiert.}$$

Es sei  $\infty > \sum_{n=2}^{\infty} (n \log n)^{-2} =: D^{-1} > 0$ .

Als Nachwuchsverteilung  $p$  setzen wir:

$$p_0 = p_1 = 0, \quad p_n = D (n \log n)^{-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

$$\Rightarrow 0 \leq p_n < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = D \sum_{n=2}^{\infty} (n \log n)^{-2} = D D^{-1} = 1.$$

Erzeugende Funktion:

$$f(s) = D \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (n \log n)^{-2} s^n, \quad 0 \leq s \leq 1$$

$$f'(s) = D \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (n(\log n)^2)^{-1} s^{n-1} \Rightarrow$$

$$(47) \quad \underline{m} = f'(1) = D \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (n(\log n)^2)^{-1} < \underline{\infty}$$

$$\text{Da } n (\log n)^2 < (n \log n)^2 \quad \text{für alle } n \geq 2$$

$$\Rightarrow \underline{m} = D \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (n(\log n)^2)^{-1} > D \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (n \log n)^{-2} = \underline{1}$$

$$\underline{E(Z_1 \log Z_1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (n \log n) p_n = D \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (n \log n)^{-1} \stackrel{(47)}{=} \underline{\infty}$$

Setzt man in diesem Beispiel  $g(n) = n^{-n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so stirbt der zugehörige Prozeß  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit der Wahrscheinlichkeit  $Q(g) = 1$  aus.

### Kapitel 3

Der Fall :  $m = \infty$

Dieses Kapitel behandelt den noch ausstehenden Fall, daß die Nachwuchsverteilung  $p$  den Erwartungswert  $m = \infty$  hat. Wir zeigen, daß sich die Aussterbewahrscheinlichkeit  $Q(g)$  des Prozesses  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit unterer Schranke  $g$  (in Analogie zu den Sätzen 1.1 und 2.2) folgendermaßen verhält:

#### Satz 3.1:

Falls  $m = \infty$ , gilt:

$$Q(g) < 1 \iff \exists 0 < t_0 < 1 - q : \limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) \varphi_n(t_0) < \infty$$

Bevor wir diesen Satz beweisen können, müssen wir noch einige Vorbereitungen treffen.

#### Definition 3.1:

- 1) Ein Maß  $\nu$  auf  $([0, \infty[ , \mathcal{L})$  heißt defekte Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn  $\nu([0, \infty[) = \int_0^\infty d\nu < 1$ .
- 2) Eine Zufallsvariable heißt degeneriert, wenn sie fast sicher konstant ist.

Satz 3.2:

$m = \infty$ . Für jedes  $t \in ]0, r[$  konvergiert  $(h_n(t) Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  fast sicher gegen eine Zufallsvariable  $V_t$ .

$$(1) \quad P(V_t = \infty) > 0, \quad P(V_t < \infty) \geq e^{-t}.$$

Beweis:

Nach Lemma 2.2 konvergiert

$X_n := \exp(-h_n(t) \cdot Z_n)$  fast sicher gegen eine Zufallsvariable  $X$  mit  $0 \leq X \leq 1$ .

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (h_n(t) \cdot Z_n) = V_t := -\log X \text{ fast sicher.}$$

$$P(V_t < \infty) = P(X > 0) = \int 1_{(X > 0)} dP \geq$$

$$\int X dP = E(X) = e^{-t}.$$

$v_t$  sei die Verteilung von  $V_t$ . Wir zeigen, daß  $v_t$  defekt ist.

Daraus folgt, daß  $P(V_t = \infty) > 0$ , denn:

$$P(V_t = \infty) = 1 - P(V_t < \infty) = 1 - v_t([0, \infty[) > 0.$$

Nach Lemma 2.1 hat  $h_n(t) Z_n$  die Kumulanten-erzeugende Funktion:

$$n^k(s) := h_n(t) Z_n^k(s) = k_n(h_n(t) \cdot s), \quad 0 \leq s < \infty$$

Aus der fast sicheren Konvergenz der  $h_n(t) Z_n$  gegen  $V_t$  folgt die schwache Konvergenz in den Verteilungen. Nach dem Stetigkeitssatz für Laplace-Transformierte (siehe [3], Kapitel XIII, 1; Seite 431) gilt für die Laplace-Transformierten

$$n\varphi := h_n(t) \cdot Z_n \varphi :$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \varphi(s) = v_t \varphi(s) \quad \text{für alle } 0 < s < \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^k(s) = -\log(v_t \varphi(s)) \quad \text{für alle } 0 < s < \infty$$

Da  $0 < t < r$ , folgt aus Kapitel 2, (18) und (15)

$$(2) \quad 0 \leq \frac{h_n(h(t))}{h_n(t)} = \frac{h(h_n(t))}{h_n(t)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(s)}{s} = 0$$

Zu  $s > 0$  gibt es folglich ein  $n_0$  mit

$$\frac{h_n(h(t))}{h_n(t)} \leq s \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

$$\Rightarrow h(t) = k_n(h_n(t) \frac{h_n(h(t))}{h_n(t)}) \leq k_n(h_n(t) \cdot s) =$$

$$= n^k(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\log(v_t \varphi(s))$$

$$\Rightarrow -\log(v_t \varphi(s)) \geq h(t) \quad \text{für alle } 0 < s < \infty$$

$$\Rightarrow v_t([0, \infty[) = \int_0^\infty dv_t = \lim_{s \rightarrow 0+} \int_0^\infty e^{-sx} v_t(dx) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0+} (v_t \varphi(s)) \leq e^{-h(t)} = f^{(-1)}(e^{-t}) < 1. \quad \text{q.e.d.}$$

### Bemerkung 3.1:

E. Seneta (1969) hat gezeigt, daß im Falle  $m = \infty$  keine positiven Konstanten  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  existieren, so daß  $C_n^{-1} Z_n$  in der Verteilung schwach gegen eine nicht-defekte, nicht-degenerierte Zufallsvariable konvergiert. ([9], 4.5 ab Seite 28)

Wir kommen nun zum

Beweis von Satz 3.1:

" $\Leftarrow$ ": Nach Lemma 2.3 existiert zu  $0 < t_0 < 1-q$   
 ein  $0 < t < r$  mit  $\limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) h_n(t) < \infty$

Es sei  $L < \infty$  so gewählt, daß

$$(3) \quad g(n) < L \cdot h_n^{-1}(t) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir setzen  $W_n = h_n(t) \cdot Z_n$

Wegen Satz 3.2 gilt

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_1 > L \text{ für alle } 1 \leq n) = P(V_t > L) \gg \\ > P(V_t = \infty) > 0.$$

Aus (3) und (4) folgert man nun genau wie im Beweis von Satz 2.2, daß  $Q(g) < 1$ .

Man muß nur  $C_n$  durch  $h_n^{-1}(t)$  ersetzen.

" $\Rightarrow$ ": Es sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) h_n(t) = \infty$  für alle  $0 < t < 1-q$

Nach Lemma 2.3 ist dies äquivalent zu

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) h_n(t) = \infty \quad \text{für alle } 0 < t < r$$

Es gibt eine Folge  $(n_l)_{l \in \mathbb{N}}$  von natürlichen Zahlen mit

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (g(n_l) \cdot h_{n_l}(t))^{-1} = 0 \quad \text{für alle } 0 < t < r.$$

Konstruktion dieser Folge:

$$n_1 := 1$$

falls  $n_l$  schon definiert ist, wähle  $n_{l+1} > n_l$  so, daß

$$g(n_{l+1}) h_{n_{l+1}}\left(\frac{r}{l+1}\right) > l+1 \quad ;$$

Zu  $0 < t < r$  gibt es ein  $l_0 \geq 2$ , so daß

$$\frac{r}{l} \leq t \quad \text{für alle } l \geq l_0.$$

$$\Rightarrow 0 \leq (g(n_l) \cdot h_{n_l}(t))^{-1} \leq (g(n_l) h_{n_l}(\frac{r}{l}))^{-1} < l^{-1}$$

für alle  $l > l_0$ .

$$\Rightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} (g(n_l) h_{n_l}(t))^{-1} = 0.$$

Für jedes  $t \in ]0, r[$  und fast alle  $\omega \in \{V_t < \infty\}$   
folgt nun:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{n_l}(\omega) \cdot (g(n_l))^{-1} =$$

$$= (\lim_{l \rightarrow \infty} h_{n_l}(t) \cdot Z_{n_l}(\omega)) (\lim_{l \rightarrow \infty} (g(n_l) \cdot h_{n_l}(t))^{-1}) =$$

$$= V_t(\omega) \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow P(\lim_{l \rightarrow \infty} Z_{n_l} \cdot (g(n_l))^{-1} = 0) \geq P(V_t < \infty) \geq$$

$$\geq e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

(1)

d.h.  $Z_{n_l} \cdot (g(n_l))^{-1}$  konvergiert fast sicher gegen 0.

Daraus folgt genau wie im Beweis von Satz 2.2, daß  $Q(g) = 1$

q.e.d.

Abschließend werden jetzt noch ein paar Beispiele diskutiert.

Beispiel 3.1:

Die Nachwuchsverteilung  $p$  sei gegeben durch

$$p_0 = 0, \quad p_n = (-1)^{n-1} \binom{1}{n} = \left| \left( \frac{1}{2} \right)_n \right| \quad \text{für } n \geq 1.$$

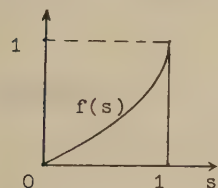
$$\Rightarrow 0 \leq p_n < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0;$$

Erzeugende Funktion:

$$\underline{f(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \binom{1}{n} s^n = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1}{n} (-s)^n =$$

$$= 1 - \sqrt{1-s}, \quad 0 \leq s \leq 1;$$

$$\underline{f(0) = 0, \quad f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1;}$$



$$\underline{f'(s) = (2\sqrt{1-s})^{-1} \Rightarrow m = f'(1) = \infty;}$$

$$\underline{k(s) = -\log f(e^{-s}) = -\log(1 - \sqrt{1-e^{-s}}), \quad 0 \leq s < \infty;}$$

$$\underline{h(s) = s - \log(2 - e^{-s}), \quad 0 \leq s < -\log p_0 = \infty,}$$

$$\text{denn: } k(s) - \log(2 - e^{-k(s)}) =$$

$$= -\log(1 - \sqrt{1-e^{-s}}) - \log(1 + \sqrt{1-e^{-s}}) =$$

$$= -\log[1 - (1 - e^{-s})] = -\log e^{-s} = s;$$

$$\underline{f^{(-1)}(s)} = \underline{1 - (1 - s)^2}, \quad p_0 = 0 \leq s \leq 1, \quad ,$$

$$\text{denn:} \quad 1 - (1 - f(s))^2 = 1 - (\sqrt{1-s})^2 = s;$$

$$\underline{g(s)} = 1 - f^{(-1)}(1-s) = \underline{s^2}, \quad 0 \leq s \leq 1 - p_0 = 1;$$

$$\Rightarrow \underline{g_n(s)} = \underline{s^{2^n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Es gilt also:

$$Q(g) < 1 \iff \exists 0 < s < 1 : \limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) \cdot s^{2^n} < \infty$$

$$\text{Also z.B.: } g_1(n) := 2^{2^n} \Rightarrow Q(g_1) < 1$$

$$g_2(n) := 2^{3^n} \Rightarrow Q(g_2) = 1$$

Dieses Beispiel läßt sich in naheliegender Weise verallgemeinern:

Es sei  $0 < \beta < 1$  beliebig, aber fest.

Die Nachwuchsverteilung  $p$  sei wieder gegeben durch

$$p_0 = 0, \quad p_n = (-1)^{n-1} \binom{\beta}{n} = \left| \binom{\beta}{n} \right| \quad \text{für } n \geq 1.$$

$$\Rightarrow 0 < p_n < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0;$$

Erzeugende Funktion:

$$\underline{\beta f(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \binom{\beta}{n} = \underline{1 - (1-s)^\beta}, \quad 0 \leq s \leq 1;$$

$$\Rightarrow \underline{\beta f(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1;$$

$$\beta f'(s) = \beta (1-s)^{\beta-1} \Rightarrow \underline{m = \infty}$$

$$\underline{\beta f^{(-1)}(s)} = \underline{1 - (1-s)^{\frac{1}{\beta}}}, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad ;$$

$$\underline{\beta g(s)} = \underline{s^{\beta-1}}, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad ;$$

$$\Rightarrow \underline{\beta g_n(s)} = \underline{s^{\beta-n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Somit ergibt sich

$$Q(g) < 1 \iff \exists 0 < s < 1 : \limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) s^{\beta-n} < \infty$$

### Beispiel 3.2:

Die Nachwuchsverteilung sei durch folgende erzeugende Funktion gegeben:

$$\underline{f(s)} = \underline{\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \cdot s^{2^j}} \quad ; \Rightarrow \quad f(1) = 1$$

$$f'(s) = \sum_{j=1}^{\infty} s^{2^j-1} \quad ; \quad \Rightarrow \quad \underline{m = \infty}$$

Da wir  $\rho$  nicht explizit angeben können, wollen wir  $f$  mit  $\beta f$  aus dem letzten Beispiel vergleichen. ( $0 < \beta < 1$ )

Es sei also  $p_0 := 0$ ,  $p_n := \left| \binom{\beta}{n} \right|$  für  $n \geq 1$ .

Nach Satz 2.3 gibt es ein  $C > 0$  mit  $p_n \sim C \cdot n^{-(1+\beta)}$ .

Es sei  $0 < C' < C$ , dann gibt es ein  $n_0$ , so daß

$$C' \cdot n^{-(1+\beta)} \leq p_n \Rightarrow C' \cdot n^{-\beta} \leq n \cdot p_n \text{ für alle } n \geq n_0.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} n \cdot p_n \geq C' \cdot \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} n^{-\beta} \geq C' \int_{2^j}^{2^{j+1}} x^{-\beta} dx =$$

$$= \frac{C'}{1-\beta} \left( (2^{j+1})^{1-\beta} - (2^j)^{1-\beta} \right) =$$

$$= (2^{1-\beta})^j \cdot \underbrace{\frac{C'(2^{1-\beta}-1)}{1-\beta}}_{>0} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$$

Es sei  $j_0$  so groß, daß

$$\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} n \cdot p_n \geq 1 \text{ für alle } j \geq j_0; \text{ daraus folgt}$$

$$(5) \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} n p_n s^{n-1} \geq \left( \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} n p_n \right) s^{2^{j+1}-1} \geq s^{2^{j+1}-1}; 0 \leq s < 1$$

$$\text{Es gibt ein } l \geq j_0 \text{ mit } \sum_{n=2^l}^{2^{l+1}-1} n p_n > j_0 + 1$$

Wähle  $s_0 < 1$  so, daß für alle  $s_0 \leq s < 1$ :

$$(6) \sum_{n=2^l}^{2^{l+1}-1} n p_n s^{n-1} > j_0 + 1,$$

dann gilt für alle  $s_0 \leq s < 1$ :

$$\begin{aligned}
 \underline{\beta_{f'}(s) - f'(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1} - \sum_{j=1}^{\infty} s^{2^j-1} \geq \\
 &\geq - \sum_{j=1}^{j_0} 1^{2^j-1} + \sum_{\substack{j=j_0 \\ j \neq 1}}^{\infty} \left[ \underbrace{\left( \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} n p_n s^{n-1} \right) - s^{2^{j+1}-1}}_{\geq 0} \right] + \\
 &+ \left( \sum_{n=2^1}^{2^{1+1}-1} n p_n s^{n-1} - s^{2^{1+1}-1} \right) >
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> -j_0 + (j_0 + 1) - 1 = \underline{0} \\
 (6)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_s^1 \beta_{f'}(t) dt \geq \int_s^1 f'(t) dt \Rightarrow 1 - \beta_f(s) \geq 1 - f(s)$$

$$\Rightarrow \underline{\beta_f(s) \leq f(s)} \quad \text{für alle } s_0 \leq s \leq 1$$

$$\Rightarrow \underline{\beta_{f^{(-1)}}(s) \geq f^{(-1)}(s)} \quad \text{für alle } f(s_0) =: s_1 \leq s \leq 1$$

denn:

$$a) \quad s \geq s_1 \Rightarrow f^{(-1)}(s) \geq f^{(-1)}(s_1) = f^{(-1)}(f(s_0)) = s_0$$

$$b) \quad s \geq s_1 \Rightarrow \beta_{f^{(-1)}}(s) = \beta_{f^{(-1)}}(f(f^{(-1)}(s))) \geq$$

$$\geq \beta_{f^{(-1)}}(\beta_f(f^{(-1)}(s))) = f^{(-1)}(s)$$

$$\Rightarrow \underline{\beta_{\mathcal{F}}(s)} = 1 - \beta_{f^{(-1)}}(1-s) \leq 1 - f^{(-1)}(1-s) = \underline{\mathcal{F}(s)} ;$$

$$0 \leq s \leq 1-s_1$$

Falls  $Q(g)$  bzw.  $Q_\beta(g)$  die Aussterbewahrscheinlichkeit des zu  $f$  bzw.  $\beta f$  gehörigen Prozesses mit unterer Schranke  $g$  bezeichnet, gilt folgender

Satz 3.3:

Für jedes  $0 < \beta < 1$  gilt:

$$Q_\beta(g) = 1 \implies Q(g) = 1$$

Beweis:

$$Q(g) < 1 \implies \exists 0 < t < 1 : \limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) \mathcal{P}_n(t) < \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_n(t) = 0 \implies \exists n_0 : 0 < \mathcal{P}_{n_0}(t) \leq 1 - s_1$$

Wähle  $0 < s < 1$  so, daß  $0 < \beta \mathcal{P}_{n_0}(s) \leq \mathcal{P}_{n_0}(t)$

Da  $\mathcal{P}, \beta \mathcal{P}$  monoton wachsend,  $\beta \mathcal{P} \leq \mathcal{P}$  auf  $[0, 1-s_1]$

und  $\mathcal{P}_1(t) \geq \mathcal{P}_2(t) \geq \dots \geq \mathcal{P}_n(t) \longrightarrow 0$ , folgt

$$\beta \mathcal{P}_n(s) \leq \mathcal{P}_n(t) \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

$$\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) \beta \mathcal{P}_n(s) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} g(n) \mathcal{P}_n(t) < \infty$$

$$\implies Q_\beta(g) < 1 \quad \text{q.e.d.}$$

Ist zum Beispiel  $g(n) = 2^{\mu n}$ ,  $\mu > 1 \implies Q(g) = 1$ .

Beispiel 3.3:

Es sei  $\sum_{n=2}^{\infty} (n (\log n)^2)^{-1} =: D^{-1}$  (siehe Beispiel 2.2, (47))

Die erzeugende Funktion der Nachwuchsverteilung sei dann

$$\underline{f(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} D (n (\log n)^2)^{-1} s^n ; \Rightarrow \underline{f(1)} = 1$$

$$f'(s) = \sum_{n=2}^{\infty} D (\log n)^{-2} s^{n-1} ; \Rightarrow \underline{m = \infty}$$

Wir vergleichen wieder  $f$  mit  ${}^B f$ .

Wegen  $p_n := \left| \binom{\beta}{n} \right| \sim C \cdot n^{-(1+\beta)}$  gibt es zu  $C'' > C$  ein  $n_0$

mit  $C'' \cdot n^{-\beta} \geq n \cdot p_n$  für alle  $n \geq n_0$

$$\text{Da } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-\beta}}{(\log n)^{-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^2}{n^{\beta}} =$$

$$= \frac{2}{\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^{\beta}} = \frac{2}{\beta^2} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\beta} = 0,$$

folgt

$$D (\log n)^{-2} - n p_n \geq D (\log n)^{-2} - C'' n^{-\beta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$$

Wie im Beispiel 3.2 folgert man daraus, daß

$$\underline{f'(s)} \geq {}^B f'(s) \quad \text{für } s_0 \leq s < 1, \quad s_0 \text{ geeignet;}$$

und hieraus, daß

$$\underline{\varphi(s)} \leq {}^B \varphi(s) \quad \text{für } 0 \leq s \leq 1-s_1.$$

Analog wie im Beispiel 3.2 beweist man dann folgenden

Satz 3.4:

Für jedes  $0 < \beta < 1$  gilt:

$$Q_{\beta}(g) < 1 \implies Q(g) < 1$$

## Literaturverzeichnis

- [1] K.B. Athreya/  
P.E. Ney : Branching Processes  
Springer-Verlag, Berlin, 1972
- [2] W. Feller : An Introduction to Probability  
Theory and Its Applications,  
Volume I
- [3] W. Feller : Volume II  
J. Wiley & Sons, New York, 1970
- [4] T.E. Harris : The Theory of Branching Processes  
Springer-Verlag, Berlin, 1963
- [5] C.C. Heyde : Extension of a result of Seneta  
for the supercritical Galton-  
Watson process.  
Ann. Math. Statist.  
41 (1970), 739 - 742
- [6] H. Kesten and  
B.P. Stigum : A limit theorem for multidimensional  
Galton-Watson processes  
Ann. Math. Statist. 37 (1966)  
1211 - 1223
- [7] N. Levinson : Limiting theorems for Galton-  
Watson branching process.  
Ill. Jour. Math. 3 (1959)  
554 - 565
- [8] E. Seneta : On recent theorems concerning the  
supercritical Galton-Watson process.  
Ann. Math. Statist. 39 (1968)  
2098 - 2102
- [9] E. Seneta : Functional equations and the  
Galton-Watson process.  
Adv. Appl. Probability 1 (1969)  
1 - 42
- [10] A.M. Zubkov : A degeneracy condition for a  
bounded branching process.  
(Russ.) Mat. Zametki 8 (1970)  
9 - 18  
  
English translation in  
Math. Notes 8, 472 - 477.



## LEBENS LAUF

Ich, Hans-Jürgen Schuh, wurde am 18. April 1947 als Sohn des Chemie-Ingenieurs Wilhelm Schuh und seiner Ehefrau Hedwig, geb. Hofmann, in Fürth in Bayern geboren.

Ab Herbst 1953 besuchte ich die Volksschule, das erste Jahr überwiegend in Nürnberg und weitere drei Jahre in Fürth. Im Herbst 1957 trat ich in das Humanistische Gymnasium in Fürth, das heutige Heinrich-Schliemann-Gymnasium, ein, wo ich den neunjährigen humanistischen Bildungsgang im Juli 1966 mit dem Abitur abschloß.

Seit dem Wintersemester 1966/67 studiere ich Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg, nur unterbrochen von einem Auslandssemester, meinem 7. Fachsemester, an der Universität Zürich. Mein Vordiplom legte ich nach dem 4. Semester im November 1968 ab. Der Diplomprüfung unterzog ich mich im Januar 1973, in meinem 13. Fachsemester. Einschließlich dem 4. Studiensemester war ich als studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg tätig und bin ab März 1973 Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle, ebenfalls am Mathematischen Institut in Erlangen. Im Sommersemester 1969 wurde ich in die Studienstiftung des deutschen Volkes aufgenommen, die mir das Auslandssemester durch ein Stipendium ermöglichte.





Druck HOGL ERLANGEN